

1 Mathematische Grundlagen

- Exponentialfunktion, Euler-Zahl: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
 - Binomische Formel: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$
 - Gauß: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 - Partielle Integration: $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$
 - Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$
 - Stirling Formel für Fakultäten: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$
 - Ableitungen: $\sin'(x) = \cos(x)$ $\cos'(x) = -\sin(x)$
 $\frac{d}{dx} \arcsin(ax + b) = \frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ $\frac{d}{dx} \arccos(ax + b) = -\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
 - Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
 - Integrationen: $\int \sin(\alpha) d\alpha = -\cos(\alpha) + C$ $\int \cos(\alpha) d\alpha = \sin(\alpha) + C$
- | | | |
|---------------|------------------------|------------------------------|
| | ohne Wiederholung | mit Wiederholung |
| • Permutation | $n!$ | $\frac{n!}{k_1! \dots k_n!}$ |
| • Variation | $n(n-1) \dots (n-k+1)$ | n^k |
| • Kombination | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung Allgemein

- Kolmogorow: $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\Omega) = 1$ $A_i \cap A_j = \emptyset : P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
- Siebformel: $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, |I|=k} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$
 - $n = 2 : \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
 - $n = 3 : \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$
 $- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- unabh. Ereignisse: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A|\bar{B})$ $\forall A, B$
- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$ A_n sind ausschöpfend und disjunkt
- Satz von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^N P(B|A_j) \cdot P(A_j)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$

3 Zufallsvariablen

3.1 Allgemeines

- Dichtefunktion**, falls $\forall x \in R : f(x) \geq 0$ und $\int_R f(x) dx = 1$
- bei diskreten ZV heißt $f(x_i) = p_i$ auch *Wahrscheinlichkeitsfunktion*
- Verteilungsfunktion** $F_X(x) := P(X < x)$
- Stetig, wenn Dichtefunktion existiert mit: $F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$

- **Erwartungswert:** $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ bzw. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx$
 der Erwartungswert ist wie ein normaler linearer Operator, $E(c) = c$
 $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} g(x_i)p_i$ (Regel des faulen Statistikers, gilt nur für Erwartungswerte)
 $E(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot P(X = x, Y = y)$
- p-tes Moment: $E(X^p)$ und p-tes zentrales Moment: $E((X - E(X))^p)$
- **Varianz:** $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
 $Var(X + c) = Var(X), Var(a \cdot X) = a^2 \cdot Var(X), Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot cov(X, Y)$
- **Covarianz:** $cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$
 Wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $cov(X, Y) = 0$. (gilt nicht andersrum!)
- **Korrelationskoeffizient:** $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$ (unterstellt lin. ZH!)
- **Median:** $\inf\{x \in R : F(x) \geq \frac{1}{2}\}$
- **Standardisierte ZV:** $E(X) = 0, Var(X) = 1$

3.2 Diskrete Verteilungen

- Binomial: Anzahl der i Erfolge bei n Versuchen. $X \sim B(p, n)$
 $P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ $F_X(k) = P(X < k), E(X) = n \cdot p$ $Var(X) = np(1-p)$
- Geometrisch: Schritte zum 1. Erfolg $X \sim Geo(p)$ $P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$
 $E(X) = \frac{1}{p}$ $Var(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$
 Sie ist *gedächtnislos*: $P(Y > s + t | Y > t) = P(Y > s)$
- Hypergeom.: N Stück mit n schlechten, Stichprobe von m Stück.
 Wkeit, dass in Stichprobe x Stück schlecht sind:
 $P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$, kann für große N als Ziehung ohne Zurücklegen als Binomial modelliert werden.
- Poisson: eingetretene Kunden, zerfallene Teilchen $X \sim Poi(\lambda)$ $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$
 $E(X) = \lambda$ (mittl. Ankunftsrate) $Var(X) = \lambda$
 Die Summe von zwei Poisson ZV = Poisson verteilt mit dem Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$

3.3 stetige Zufallsvariablen

- 0,1-gleichverteilt: $X \sim R(0, 1)$ $F(x) = \{x < 0 : 0, 0 \leq x < 1 : x, x \geq 1 : 1\}$ $f(x) = \{0, 1, 0\}$
- a,b-gleichverteilt: $X \sim R(a, b)$ $f(x) = \{x < a : 0, a \leq x < b : \frac{1}{b-a}, x > b : 0\}$
 $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Exponentialverteilt: $X \sim Exp(\lambda)$ $F(x) = \{x \geq 0 : 1 - e^{-\lambda x}, x < 0 : 0\}$ $f(x) = \{x \geq 0 : \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x < 0 : 0\}$
 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ sie ist gedächtnislos
- Normalverteilt: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
 $E(X) = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$
- Standardnormal: $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ Dichte: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ Vert.: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
 Werte sind tabelliert, dabei gilt: $\phi(x) = \phi(-x)$ und $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
 α -Quantil: für welches x gilt $\Phi(x) = \alpha$, außerdem $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.
 Transformation von Normal zu Standard: $\frac{X-\mu}{\sigma} : X \sim N(10, 4) : P(X < 11) = \Phi(\frac{11-10}{2})$

3.4 Besonderes

- Reihensystem: $X = \min X_i, Rel = P(X \geq t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \geq t) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t}$
 $E(X) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$

- Parallelsystem: $X = \max X_i$, $Rel = P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

- k-aus-n System: $E(T) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1}$

- Transformationsformel: $h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$
Beispiel: $U \sim R(0, 1)$, $X = g(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln U$; g^{-1} und $\frac{d}{dx} g^{-1}$ bilden; dann einsetzen; geht auch rückwärts

- Randverteilung: $X = (X_1, X_2)$ $F_{X_1} = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = P(X_1 < x)$

- unabhängige Variablen erlauben bei der Randdichte die Multiplikation, daher gilt auch: $p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}$, ganz unten rechts eine 1 Spalten und Zeilen Summen!

4 Ungleichungen

- $\min_{c \in \mathbb{R}} E(X - c)^2 = Var(X)$
- Jensen Ungleichung: $g(x)$ konvex: $E(g(X)) \geq g(E(X))$ $g(x) = x^2$ ist konvex, $\ln(x)$ ist konkav
- Markov Ungleichung: $c > 0 : P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$
- Tschebychev Ungleichung: $P(|Y - E(Y)| > \epsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\epsilon^2}$

5 Grenzwertsätze

- Schwaches Gesetz d. g. Z.: unkorrelierte ZV: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$
- Gesetz der großen Zahlen: ZV id. verteilt und unabhängig: $P(\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$
Zum Schätzen von Integralen: $E(g(X)) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)$
- **Glivenko-Cantelli** X_i unabh. ZV: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$
- **Zentraler Grenzwertsatz**: X_i , unabh. ident. verteilt ($EX_i = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$): $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
 $Y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{Z}_n - \mu}{\sigma} : \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n < x) = \Phi(x)$
- **Moivre-Laplace**: für großes n kann Binomial durch Normal ersetzt werden (Regel: $np \geq 10$ und $n(1-p) \geq 10$)
 $X_i \sim Bi(1, p)$ $Z_n = \sum X_i : \lim Z_n \sim N(np, np(1-p))$ $P(Z_n < y) \approx \Phi\left(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

6 Markoffsche Ketten

- Def: $\{X_t\}_{t \in T}$ ist Familie von ZV, $\forall t : P(X_t \in S) = 1$ heißt *Markov Kette* falls: $P(X_{t+1} = j | X_t = i) =: p_{ij}^{(t)}$
- Anfangsverteilung: $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$
- Eine Markov-Kette heißt *homogen*, wenn p_{ij} unabh. von t sind!
- Übergangsmatrix: $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$, Bedingungen: $p_{ij} \geq 0$ $\sum_j p_{ij} = 1 \forall i \in S$
- Erreichbarkeit in n-Schritten: $p_{ij}(n) = P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i)$
- Rekursion nach Chapman Kolmogorov: $M_n = M^n$ $p_{ij}(n) = \sum_{k \in S} p_{ik}(n-m) \cdot p_{kj}(m) = \sum_{k \in S} p_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}$
 $\Rightarrow P(X_n = j) = \sum_k p_{kj}(n) \cdot p_k^0$
- Berechnung der Wahrscheinlichkeiten: $p_j = P(X_n = j), p^T = (p_1, p_2, p_3, \dots) \Rightarrow p = M^{nT} \cdot p^0, p^T = p^{0T} \cdot M^n$
- j ist von i **erreichbar**, falls $\exists n : p_{ij}(n) > 0$. Bez: $i \rightarrow j$

- i und j kommunizieren, wenn $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$. Bez: $i \leftrightarrow j$ (Äq. Rel!)
- **Unwesentlicher Zustand**: Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl n , so dass $p_{ij}(n) > 0$, aber $p_{ji}(m) = 0 (\forall m)$, so heißt i unwesentlich
- **absorbierender Zustand**: wenn Äquivalenzklasse nur aus einem Zustand besteht
- Eine MK heißt **irreduzibel**, wenn der Zustandsraum aus genau 1 Klasse wesentlicher Zustände besteht!
- $f_i(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Schritten erstmalig wieder den Zustand i zu erreichen ($f_i(0) = 0, f_i(1) = p_{ii}$)
- $F_i := \sum_{j=1}^{\infty} f_i(j)$ (Wkeit i -wann in den Zustand i zurückzukehren).
Ein Zustand heißt **rekurrent**, wenn $F_i = 1$. Ist $F_i < 1$ so heißt er **transient**.
- Zustand rekurrent: er wird unendlich oft mit Wkeit 1 erreicht.
- Zustand transient: er kann höchstens endlich oft erreicht werden
- Ein Zustand ist g.d. rekurrent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$. Er ist transient, wenn $< \infty$
- Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j , so ist auch j rekurrent (transient).
- Eine irreduz. MK mit endlich vielen Zuständen, hat nur rekurrente Zustände.
- Ein Zustand heißt **periodisch** mit Periode d , falls $d \text{ ggT}$ aller n ist, für die $p_{ii}(n) > 0$. ($d = 1$ aperiodisch).
Falls $\forall n : p_{ii}(n) = 0$, so setzen wir $d = \infty$
- i periodischer Zstd. mit Periode d und kommuniziert mit j , so hat j auch Periode d .
- $\mu_i =$ erwartete Rückkehrzeit. $\mu_i < \infty \rightarrow$ positiv rekurrent, $\mu_i = \infty \rightarrow$ null-rekurrent
- MK heißt **ergodisch**, falls nur pos. rekurrente und aperiodische Zustände
- Anzahl der EW der Übergangsmatrix = Anzahl der rek. Äq.-Klassen

7 Zufallszahlen

- Manuell: Dezimalstellen würfeln, Binärdarstellung per Münzwurf, 10er Würfel für Dezimalstellen, Rauschen
- Kongruenzmethoden: $z_{i+1} := (a \cdot z_i + r) \text{ mod } m$, Normierung: $u_i = \frac{z_i}{m}$.
- Die lin. Kongruenzmethode besitzt genau dann die volle Periodenlänge, wenn:
 1. $\text{ggT}(r, m) = 1, (\text{ggT}(0, m) := m)$
 2. $a \text{ mod } p = 1$ für alle Primfaktoren p von m
 3. $a \text{ mod } 4 = 1$, falls m ein Vielfaches von 4 ist

8 Aufgaben

- Qualitätskontrolle: Ausgangspunkt ist $P(X < x)$, dabei ist X die Anzahl schlechter Chips und x die Grenze. Für Binomialverteilungen kann man daraus $\sum_{i=0}^{x-1} P(X = i)$ machen.
- Schrauben: $0.1 = P(X < 70mm) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{70mm-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{70mm-\mu}{\sigma}\right) = 0.1$
 $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, also $0.9 = \Phi\left(-\frac{70mm-\mu}{\sigma}\right)$.
- Maximal: $F_X(x) = P(X < x) = P(\max\{T_1, \dots, T_n\} < x) = P(T_i < x | \forall i) = P(T_1 < x \cap \dots \cap T_n < x) = \prod P(T_i < x)$
- Minimal: $F_X(x) = P(\min\{T_1, \dots, T_n\} < x) = P(T_i < x | \exists i) = 1 - P(\forall i : T_i \geq x) = 1 - \prod P(T_i \geq x) = 1 - \prod (1 - P(T_i < x))$
- Alternativ Minimal: $P(\min\{X, Y\} \leq x)$, 1: $P(X = k)$, dann $P(X \leq x)$, dann $P(\min \dots) = P(X \leq x \vee Y < x)$, dann Siebformel
- Anwendung des zentralen GWS, Münzwurf: $X_i \sim Bi(0.5)$, Gesucht: $P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \leq 475\right)$

$$P\left(\sqrt{1000} \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leq \sqrt{1000} \frac{475 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right) \approx \Phi\left(\sqrt{1000} \frac{475 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)$$