1 Mathematische Grundlagen

- Exponentialfunktion, Euler-Zahl: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
- Binomische Formel: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$
- Gauß: $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- Partielle Integration: $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$
- Geometrische Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $\qquad \sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$
- Stirling Formel für Fakultäten: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$
- Ableitungen: $\sin'(x) = \cos(x)$ $\qquad \cos'(x) = -\sin(x)$
  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(ax+b) = \frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ $\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(ax+b) = -\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$
- Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- Integrationen: $\int \sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = -\cos(\alpha) + C$ $\qquad \int \sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = -\cos(\alpha) + C$
-

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}$
Variation	$n(n-1)\ldots(n-k+1)$	n^k
Kombination	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung Allgemein

- Kolmogorow: $0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\Omega) = 1 \quad A_i \cap A_j = \emptyset : P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} P(A_i)$
- Siebformel: $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum\limits_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},|I|=k} P\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)$
  - $n = 2 : \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$
  - $n = 3 : \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$
    $-\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- unabh. Ereignisse: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A|\overline{B}) \qquad \forall A, B$
- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$ $\quad A_n$ sind ausschöpfend und disjunkt
- Satz von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$ $\qquad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} P(B|A_j)\cdot P(A_j)} = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)}$

3 Zufallsvariablen

3.1 Allgemeines

- **Dichtefunktion**, falls $\forall x \in R : f(x) \geq 0$ und $\int\limits_R f(x)dx = 1$
- bei diskreten ZV heißt $f(x_i) = p_i$ auch *Wahrscheinlichkeitsfunktion*
- **Verteilungsfunktion** $F_X(x) := P(X < x)$
- Stetig, wenn Dichtefunktion existiert mit: $F_X(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$

- **Erwartungswert**: $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ bzw. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot x dx$
der Erwartungswert ist wie ein normaler linearer Operator, $E(c)=c$
$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} g(x_i)p_i$ (Regel des faulen Statistikers, gilt nur für Erwartungswerte)
$E(X\cdot Y)=\sum_x\sum_y x\cdot y\cdot P(X=x,Y=y)$

- p-tes Moment: $E(X^p)$ und p-tes zentrales Moment: $E((X-E(X))^p)$

- **Varianz**: $Var(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$
$Var(X+c)=Var(X), Var(a\cdot X)=a^2\cdot Var(X), Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2\cdot cov(X,Y)$

- **Covarianz**: $cov(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(X\cdot Y)-E(X)E(Y)$
Wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $cov(X,Y)=0$. (gilt nicht andersrum!)

- **Korrelationkoeffizient**: $\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y}}$ (unterstellt lin. ZH!)

- **Median**: $\inf\{x\in R: F(x)\geq\frac{1}{2}\}$

- **Standardisierte ZV**: $E(X)=0$, $Var(X)=1$

3.2 Diskrete Verteilungen

- Binomial: Anzahl der i Erfolge bei n Versuchen. $X\sim B(p,n)$
$P(X=i)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $F_X(k)=P(X<k)$, $E(X)=n\cdot p$ $Var(X)=np(1-p)$

- Geometrisch: Schritte zum 1. Erfolg $X\sim Geo(p)$ $P(X=i)=p(1-p)^{i-1}$
$E(X)=\frac{1}{p}$ $Var(X)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}$
Sie ist *gedächtnislos*: $P(Y>s+t|Y>t)=P(Y>s)$

- Hypergeom.: N Stück mit n schlechten, Stichprobe von m Stück.
Wkeit, dass in Stichprobe x Stück schlecht sind:
$P(X=x)=\frac{\binom{n}{x}\cdot\binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$, kann für große N als Ziehung ohne Zurücklegen als Binomial modelliert werden.

- Poisson: eingetroffene Kunden, zerfallene Teilchen $X\sim Poi(\lambda)$ $P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\cdot e^{-\lambda}$
$E(X)=\lambda$ (mittl. Ankunftsrate) $Var(X)=\lambda$
Die Summe von zwei Poisson ZV = Poisson verteilt mit dem Parameter $\lambda_1+\lambda_2$

3.3 stetige Zufallsvariablen

- 0,1-gleichverteilt: $X\sim R(0,1)$ $F(x)=\{x<0:0, 0\leq x<1:x, x\geq 1:1\}$ $f(x)=\{0,1,0\}$

- a,b-gleichverteilt: $X\sim R(a,b)$ $f(x)=\{x<a:0, a\leq x<b:\frac{1}{b-a}, x>b:0\}$
$E(X)=\frac{a+b}{2}$ $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

- Exponentialverteilt: $X\sim Exp(\lambda)$ $F(x)=\{x\geq 0:1-e^{-\lambda x}, x<0:0\}$ $f(x)=\{x\geq 0:\lambda\cdot e^{-\lambda x}, x<0:0\}$
$E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ sie ist gedächtnislos

- Normalverteilt: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
$E(X)=\mu$ $Var(X)=\sigma^2$

- Standardnormal: $\mu=0,\sigma^2=1$ Dichte: $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ Vert.: $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$
Werte sind tabellliert, dabei gilt: $\phi(x)=\phi(-x)$ und $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$
α-Quantil: für welches x gilt $\Phi(x)=\alpha$, außerdem $P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$.
Transformation von Normal zu Standard: $\frac{X-\mu}{\sigma}: X\sim N(10,4): P(X<11)=\Phi(\frac{11-10}{2}$

3.4 Besonderes

- Reihensystem: $X=\min X_i$, $Rel=P(X\geq t)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\geq t)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i t}$
$E(X)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$

- Parallelsystem: $X = \max X_i$, $Rel = P(X \geq t) = 1 - P(X < t) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$

  $E(X) = \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

- k-aus-n System: $E(T) = \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{n-i+1}$

- Transformationsformel: $h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$
  Beispiel: $U \sim R(0,1), X = g(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln U$; g^{-1} und $\frac{d}{dx} g^{-1}$ bilden; dann einsetzen; geht auch rückwärts

- Randverteilung: $X = (X_1, X_2) \quad F_{X_1} = \lim\limits_{y \to \infty} F(x, y) = P(X_1 < x)$

- unabhängige Variablen erlauben bei der Randdichte die Multiplikation, daher gilt auch: $p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$, ganz unten rechts eine 1 Spalten und Zeilen Summen!

4 Ungleichungen

- $\min\limits_{c \in R} E(X - c)^2 = Var(X)$

- Jensen Ungleichung: $g(x)$ konvex: $E(g(X)) \geq g(E(X)) \qquad g(x) = x^2$ ist konvex, $ln(x)$ ist konkav

- Markov Ungleichung: $c > 0 : P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$

- Tschebychev Ungleichung: $P(|Y - E(Y)| > \epsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\epsilon^2}$

5 Grenzwertsätze

- Schwaches Gesetz d. g. Z.: *unkorrelierte ZV*: $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\overline{X_n} - \mu| > \epsilon) = 0$

- Gesetz der großen Zahlen: ZV id. verteilt und unabhängig: $P(\omega : \lim\limits_{n \to \infty} \overline{X_n} = \mu) = 1$

  Zum Schätzen von Integralen: $E(g(X)) \approx \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$

- **Glivenko-Cantelli** X_i unabh. ZV: $P(\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in R} |F_n(x) - F(x) = 0) = 1$

- **Zentraler Grenzwertsatz**: X_i, unabh. ident. verteilt ($EX_i = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$): $\overline{Z_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

  $Y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{Z_n} - \mu}{\sigma} : \quad \lim\limits_{n \to \infty} P(Y_n < x) = \Phi(x)$

- **Moivre-Laplace**: für großes n kann Binomial durch Normal ersetzt werden (Regel: $np \geq 10$ und $n(1-p) \geq 10$)
  $X_i \sim Bi(1, p) \quad Z_n = \sum X_i : \lim Z_n \sim N(np, np(1-p)) \qquad P(Z_n < y) \approx \Phi(\frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}})$

6 Markoffsche Ketten

- Def: $\{X_t\}_{t \in T}$ ist Familie von ZV, $\forall t : P(X_t \in S) = 1$ heißt *Markov Kette* falls: $P(X_{t+1} = j | X_t = i) =: p_{ij}^{(t)}$

- Anfangsverteilung: $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$

- Eine Markov-Kette heißt *homogen*, wenn p_{ij} unabh. von t sind!

- Übergangsmatrix: $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$, Bedingungen: $p_{ij} \geq 0 \qquad \sum\limits_{j} p_{ij} = 1 \forall i \in S$

- Erreichbarkeit in n-Schritten: $p_{ij}(n) = P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i)$

- Rekursion nach Chapman Kolmogorov: $M_n = M^n \quad p_{ij}(n) = \sum\limits_{k \in S} p_{ik}(n-m) \cdot p_{kj}(m) = \sum\limits_{k \in S} p_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}$

  $\Rightarrow P(X_n = j) = \sum\limits_{k} p_{kj}(n) \cdot p_k^0$

- Berechnung der Wahrscheinlichkeiten: $p_j = P(X_n = j), p^T = (p_1, p_2, p_3, \dots) :\Rightarrow p = M^{n^T} \cdot p^0, p^T = p^{0^T} \cdot M^n$

- j ist von i **erreichbar**, falls $\exists n : p_{ij}(n) > 0$. Bez: $i \to j$

- i und j kommunizieren, wenn $i \to j$ und $j \to i$. Bez: $i \leftrightarrow j$ (Äq. Rel!)
- **Unwesentlicher Zustand**: Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl n, so dass $p_{ij}(n) > 0$, aber $p_{ji}(m) = 0 (\forall m)$, so heißt i unwesentlich
- **absorbierender Zustand**: wenn Äquivalenzklasse nur aus einem Zustand besteht
- Eine MK heißt **irreduzibel**, wenn der Zustandsraum aus genau 1 Klasse wesentlicher Zustände besteht!
- $f_i(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Schritten erstmalig wieder den Zustand i zu erreichen ($f_i(0) = 0, f_i(1) = p_{ii}$)
- $F_i := \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_i(j)$ (Wkeit i-wann in den Zustand i zurückzukehren).
  Ein Zustand heißt **rekurrent**, wenn $F_i = 1$. Ist $F_i < 1$ so heißt er **transient**.
- Zustand rekurrent: er wird unendlich oft mit Wkeit 1 erreicht.
- Zustand transient: er kann höchstens endlich oft erreicht werden
- Ein Zustand ist g.d. rekurrent, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$. Er ist transient, wenn $< \infty$
- Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j, so ist auch j rekurrent (transient).
- Eine irreduz. MK mit endlich vielen Zuständen, hat nur rekurrente Zustände.
- Ein Zustand heißt **periodisch** mit Periode d, falls d ggT aller n ist, für die $p_{ii}(n) > 0$. ($d = 1$ aperiodisch).
  Falls $\forall n : p_{ii}(n) = 0$, so setzen wir $d = \infty$
- i periodischer Zstd. mit Periode d und kommuniziert mit j, so hat j auch Periode d.
- μ_i = erwartete Rückkehrzeit. $\mu_i < \infty \to$ positiv rekurrent, $\mu_i = \infty \to$ null-rekurrent
- MK heißt **ergodisch**, falls nur pos. rekurrente und aperiodische Zustände
- Anzahl der EW der Übergangsmatrix = Anzahl der rek. Äq.-Klassen

7 Zufallszahlen

- Manuell: Dezimalstellen würfeln, Binärdarstellung per Münzwurf, 10er Würfel für Dezimalstellen, Rauschen
- Kongruenzmethoden: $z_{i+1} := (a \cdot z_i + r) mod m$, Normierung: $u_i = \frac{z_i}{m}$.
- Die lin. Kongruenzmethode besitzt genau dann die volle Periodenlänge, wenn:
  1. $ggT(r, m) = 1, (ggT(0, m) := m)$
  2. $amodp = 1$ für alle Primfaktoren p von m
  3. $amod4 = 1$, falls m ein Vielfaches von 4 ist

8 Aufgaben

- Qualitätskontrolle: Ausgangspunkt ist $P(X < x)$, dabei ist X die Anzahl schlechter Chips und x die Grenze. Für Binomialverteilungen kann man daraus $\sum\limits_{i=0}^{x-1} P(X = i)$ machen.
- Schrauben: $0.1 = P(X < 70mm) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{70mm-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{70mm-\mu}{\sigma}) = 0.1$
  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, also $0.9 = \Phi(-\frac{70mm-\mu}{\sigma})$.
- Maximal: $F_X(x) = P(X < x) = P(\max\{T_1, ..., T_n\} < x) = P(T_i < y|\forall i) = P(T_1 < x \cap ... \cap T_n < x)$
  $= \prod P(T_i < x)$
- Minimal: $F_X(x) = P(\min\{T_1, \dots, T_n\} < x) = P(T_i < x|\exists i) = 1 - P(\forall i : T_i \geq x)$
  $= 1 - \prod P(T_i \geq x) = 1 - \prod(1 - P(T_i < x)$
- Alternativ Minimal: $P(\min\{X, Y\} \leq x)$, 1: $P(X = k)$, dann $P(X \leq x)$, dann $P(\min ...) = P(X \leq x \vee Y < x)$, dann Siebformel
- Anwendung des zentralen GWS, Münzwurf: $X_i \sim Bi(0.5)$, Gesucht: $P(\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i \leq 475)$

$$P(\sqrt{1000}\frac{\frac{1}{1000}\cdot\sum\limits_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \leq \sqrt{1000}\frac{\frac{1}{1000}\cdot 475 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}) \approx \Phi(\sqrt{1000}\frac{\frac{1}{1000}\cdot 475 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}})$$